Devoir maison n° 2 : correction

Exercice 1. *Autour de la série harmonique*
On s'intéresse ici à la série harmonique, c'est-à-dire à la série $\sum \frac{1}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n sa somme partielle d'indice n.

Partie A - Développement asymptotique

Q1. Justifier que, pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Soit $k \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}$ et de manière analogue $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}$, d'où l'encadrement souhaité. (Ne pas hésiter à illustrer par un schéma.)

Q2. En déduire que la série harmonique est divergente et que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les relations précédentes, il vient

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant \displaystyle\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leqslant & H_n & \leqslant 1 + \ln(n) - \ln(1) \end{array}$$

relation de Chasles

$+1$ *et primitive*

En particulier, comme le membre de gauche tend vers $+\infty$, par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ donc $\boxed{\text{la série harmonique est divergente}}$.
De plus, comme $1 + \ln(n+1) - \ln(2) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ et $1 + \ln(n) - \ln(1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$, l'encadrement précédent donne $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \\ &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{-2n^2 + 2n(n+1) - (n+1)}{2n^2(n+1)} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{n-1}{2n^2(n+1)} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2n^3} \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{2n^2}}. \end{aligned}$$

simplification sommes + DL ln

Q4. En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est convergente.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$) donc d'après la question précédente et par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n - u_{n+1} \text{ est convergente}}$.

Q5. En déduire qu'il existe un réel γ tel que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

Par télescopage, on déduit de la question précédente que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$, *i.e.* $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$. Or par définition $u_n = H_n - \ln n$, d'où $\boxed{H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)}$.

Partie B - Quelques conséquences

Les questions de cette partie sont indépendantes mais utilisent toutes le résultat obtenu à la fin de la partie A.

Q6. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ converge et calculer sa somme en fonction de γ.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} [\ln(n) - \ln(n-1)] \\
&= H_N - 1 - (\ln(N) - \ln(1)) && \textit{télescopage} \\
&\underset{+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1) - 1 - \ln N && \textbf{\textit{Q5}} \\
&= \gamma - 1 + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \gamma - 1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \text{ est convergente et } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \gamma - 1}$.

Q7. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Remarque : On pourrait facilement obtenir la convergence (mais pas la somme) grâce à un équivalent.

Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} + 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n}\right) + 2 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} && \textit{± termes pour faire apparaître une somme partielle de la série harmonique} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} + 2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&= 2H_N - 2H_{2N+1} + 2 \\
&\overset{\textbf{Q5}}{=} 2(\ln(N) + \gamma + o(1)) - 2(\ln(2N+1) + \gamma + o(1)) + 2 \\
&= 2\ln\left(\frac{N}{2N+1}\right) + 2 + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\ln\frac{1}{2} + 2 = 2 - 2\ln 2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n(2n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2}$.

Q8. Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série $\sum a^{H_n}$.

Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{H_n} = \mathrm{e}^{H_n \ln a} > 0$. D'après **Q5**, on a

$$a^{H_n} \underset{+\infty}{=} a^{\ln(n)+\gamma+o(1)} = a^{\ln n} a^{\gamma} \, \mathrm{e}^{\ln(a)\times o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{\ln n} a^{\gamma}.$$

Or a^{γ} est une constante et

$$a^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(a)} = n^{\ln a} = \frac{1}{n^{-\ln a}}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{-\ln a}}$ converge si et seulement si $-\ln a > 1$, *i.e.* $a < \mathrm{e}^{-1}$. Finalement, par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum a^{H_n} \text{ converge si et seulement si } a < \mathrm{e}^{-1}}$.

Q9. ★ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid H_n \geqslant k\}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \mathrm{e}$.

Remarque : comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, par définition d'une limite infinie, l'entier n_k est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après **Q5**, on a $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$ ce qui peut aussi s'écrire $H_n = \ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition de n_k, on a $H_{n_k} \geqslant k$ et $H_{n_k-1} < k$, ce qui se réécrit

$$\ln(n_k) + \gamma + \varepsilon_{n_k} \geqslant k \quad \text{et} \quad \ln(n_k - 1) + \gamma + \varepsilon_{n_k-1} < k.$$

En passant à l'exponentielle (qui est croissante) et en réorganisant, il vient

$$\mathrm{e}^{k-\gamma-\varepsilon_{n_k}} \leqslant n_k < 1 + \mathrm{e}^{k-\gamma-\varepsilon_{n_k}}.$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_{n_k} = 0$, on obtient $n_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{k-\gamma}$. En particulier, $\boxed{\frac{n_{k+1}}{n_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{k+1-\gamma}}{\mathrm{e}^{k-\gamma}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{e}}$.

Exercice 2. *Démonstration de la formule de Stirling*

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling vue en cours.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

Q10. À l'aide d'un développement asymptotique, montrer que la série $\sum w_n$ converge.

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ensuite, en prenant le logarithme, on obtient :

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln(\mathrm{e}^{-1}) + \ln\left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, par critère d'équivalence de séries à termes de signe constant, on en déduit que $\boxed{\sum w_n \text{ converge}}$.

Q11. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite $\ell > 0$.

Comme pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$, par télescopage, la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum w_n$ converge.

Ainsi, d'après **Q10**, on en déduit que la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons $c \in \mathbb{R}$ sa limite.

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } \ell = \mathrm{e}^c > 0}$.

Q12. On admet que $\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{p\pi}}$. En déduire la valeur de ℓ et conclure.

D'après la question précédente, on a $v_n = \dfrac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \ell$, *i.e.* $n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\ell}$.

On injecte alors cet équivalent (pour $n = 2p$ et $n = p$) dans la formule admise :

$$\frac{1}{\sqrt{p\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2p)^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{2p}\ell^2}{\ell 2^{2p}\left(p^p\,\mathrm{e}^{-p}\sqrt{p}\right)^2} = \frac{\cancel{2^{2p}}\cancel{p^{2p}}\cancel{\mathrm{e}^{-2p}}\sqrt{2p}\ell^2}{\ell\cancel{2^{2p}}\cancel{p^{2p}}\cancel{\mathrm{e}^{-2p}}p} = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{p}},$$

d'où $\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$. Finalement, on a démontré la formule de Stirling $\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$.

Q13. *Application* : grâce à la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la formule de Stirling, $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n + o\left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)$. En appliquant le logarithme, il vient

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n + o\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)\right) && \textit{factorisation et } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\
&= \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right) + \ln(1 + o(1)) && \textit{propriétés } \ln \textit{ et } \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + n\ln n - n\ln\mathrm{e} + o(1) \\
&= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1) && \textit{terme dominant} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \boxed{n\ln n}.
\end{aligned}$$